МНОГОКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ СИСТЕМ РЕГРЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

А.П. Котенко [1,2], Д.А. Пшенина [2]

[1] Самарский государственный аэрокосмический университет имени академика С.П. Королёва (национальный исследовательский университет) (СГАУ), Самара, Россия,
[2] Самарский государственный технический университет (СамГТУ), Самара, Россия

Дана математическая модель управления качеством продукции сложного производственного процесса, подверженного влиянию стохастических воздействий, в виде системы взаимозависимых линейных регрессионных уравнений.

Ключевые слова: система регрессий, идентификация параметров уравнения, многокритериальная оптимизация.

Введение

Многие производственные процессы подвержены неустойчивыми колебаниями параметров сырья (химический состав, примеси…) и технологических процессов (неоднородность прогрева или перемешивания, влияние ошибок взвешивания или времени добавления присадок, устаревание катализатора…). Редко удаётся точно отследить такие флуктуации и отреагировать оптимальным образом. Поэтому на выходе готовой продукции отслеживаются лишь усреднённые статистические характеристики. Если они попадают в установленные стандартами пределы, считается, что технология отлажена. Это не гарантирует отбраковку отдельных экземпляров (партий) продукции даже после прохождения технического контроля.

Кроме того, часто такие целевые показатели взаимосвязаны обратными зависимостями: улучшение одних характеристик влечёт ухудшение других и наоборот. В этом случае управляющие воздействия на параметры технологического процесса требуют тонкой отладки и минимальных лагов запаздывания относительно моментов замера результатов производства.

Подобные технологии характерны, например, для процессов нефтепереработки, когда сырьё поступает с разных месторождений нефти и имеет значительный разброс и нестабильность свойств [1]. Выходные (результирующие, целевые) значения параметров продукции можно исследовать статистически, однако кроме высокой стоимости и сложности организации замеров химических свойств идентификация параметров соответствующих линейных либо нелинейных регрессионных уравнений не позволяет узнать, как подобрать управляющие технологические факторы, гарантирующие попадание конфликтующих целевых критериев в заданную стандартами область?

Математическая модель

В этой ситуации предложим следующую математическую модель [1]. Идентифицируем параметры (структурные коэффициенты) системы AY=BX линейных (линеаризованных) взаимозависимых регрессионных уравнений (структурная форма модели – СФМ):

$$\begin{cases} y_1 = a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + \ldots + a_{1,k-1}y_{k-1} + a_{1k}y_k + \\ + b_{11}x_1 + \ldots + b_{1n}x_n + \varepsilon_1, \\ y_2 = a_{21}y_1 + a_{23}y_3 + \ldots + a_{2,k-1}y_{k-1} + a_{2k}y_k + \\ + b_{21}x_1 + \ldots + b_{2n}x_n + \varepsilon_2, \\ y_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + \ldots + a_{3,k-1}y_{k-1} + a_{3k}y_k + \\ + b_{31}x_1 + \ldots + b_{3n}x_n + \varepsilon_3, \\ \ldots \\ y_k = a_{k1}y_1 + a_{k2}y_2 + \ldots + a_{k,k-1}y_{k-1} + a_{kk}y_k + \\ + b_{k1}x_1 + \ldots + b_{kn}x_n + \varepsilon_k. \end{cases}$$

где X:=(x1,x2,…,xn) – вектор управляющих регрессоров – экзогенные факторы задачи управления;

Y:=(y1,y2,…,yk) – вектор целевых (стандартизованных) показателей – эндогенные факторы;

$B := \|b_{ij}\|$, i=1…k, j=1…n;

$$A := \begin{Vmatrix} 1 & -a_{12} & -a_{13} & \ldots & -a_{1k} \\ -a_{21} & 1 & -a_{23} & \ldots & -a_{2k} \\ -a_{31} & -a_{32} & 1 & \ldots & -a_{3k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -a_{k1} & -a_{k2} & -a_{k3} & \ldots & 1 \end{Vmatrix}.$$

Здесь предполагается, что от исходного (натурального) масштаба показателей совершён переход к стандартизованным переменным (центрированным на математическое ожидание и нормированным на единичное среднее квадратическое отклонение), что объясняет отсутствие свободных членов регрессионных уравнений.

Построим также приведённую форму модели (ПФМ), связывающую все целевые факторы со всеми регрессорами:

$$\begin{cases} y_1 = \delta_{11}x_1 + \delta_{12}x_2 + \ldots + \delta_{1n}x_n + \omega_1, \\ y_2 = \delta_{21}x_1 + \delta_{22}x_2 + \ldots + \delta_{2n}x_n + \omega_2, \\ \ldots \\ y_k = \delta_{k1}x_1 + \delta_{k2}x_2 + \ldots + \delta_{kn}x_n + \omega_k. \end{cases}$$

Практически всегда применение метода наименьших квадратов (МНК) к отдельным уравнениям системы СФМ даёт по заданной экспериментальной выборке несостоятельные точечные оценки структурных коэффициентов генеральной совокупности.

Поэтому предложим применить косвенный МНК (КМНК): выразим структурные коэффициенты через коэффициенты приведённой формы модели (ПФМ)

Выборочные приведённые коэффициенты δij находятся с помощью МНК и при обычных предположениях дают по экспериментальной выборке состоятельные точечные оценки соответствующих приведённых коэффициентов генеральной совокупности.

Таким образом, задача сводится к идентификации выборочных структурных коэффициентов СФМ по выборочным приведённым коэффициентам ПФМ.

Подстановка идентифицированных приведённых регрессий эндогенных факторов в структурные уравнения СФМ позволяет приравнять коэффициенты при независимых (экзогенных) переменных и получить искомую систему линейных неоднородных алгебраических уравнений (СЛАУ). Данная СЛАУ имеет общий вид, так как число уравнений и число неизвестных для каждого уравнения СФМ в общем случае произвольны (а также могут меняться от одного уравнения к другому).

Возможные следующие случаи [2]:

- точная идентифицируемость – структурные коэффициенты определяются по приведённым алгебраически (а значит, – и статистически) однозначно,
- неидентифицируемость – существует бесконечное число алгебраических решений (а значит, – статистически равноценных, т.е. неразличимых в данной СФМ),
- сверхидентифицируемость – противоречивая алгебраически система имеет единственное наилучшее в смысле МНК решение (статистически однозначное).

Специальным подбором нулевых структурных коэффициентов можно добиться точной идентифицируемости всех уравнений СФМ.

Результатом идентификации структурных коэффициентов является система линейных уравнений AY=BX, связывающих вектор X управляющих (экзогенных) регрессоров с вектором Y результирующих (эндогенных) параметров продукции.

Тогда оптимальное управление X* даёт формула X*=B–1AY*, где Y* – заданный (оптимальный) набор характеристик продукции.

Заключение

Подстановка предельно допустимых стандартами значений вектора Y позволяет найти допустимые отклонения управляющих воздействий X и сделать вывод о приемлемости существующей технологии производства, либо о необходимости её модернизации или коренной замены. [1]

Литература

1. Котенко, А.П. Применение методов многомерного регрессионного анализа для оптимизации производства битума стандартизованных характеристик / А.П. Котенко, О.А. Кузнецова / Современные информационные технологии и ИТ-образование. Сборник научных трудов 10-й Юбилейной международной научно-практической конф. – М.: МГУ. – 2015. – С. 356-359.
2. Котенко, А.П. Геометрия систем линейных регрессионных уравнений / А.П. Котенко, М.Б. Букаренко // Известия СНЦ РАН. – 2013. – Т. 15, № 6(3). – С. 820-823.